JUBILACIÓN MEDIANTE CAPITALIZACIÓN Y REPARTO SEGÚN EL CONTEXTO DEMOGRÁFICO: RESULTADOS COMPARATIVOS*

Didier Blanchet
Director de la Escuela Nacional de Estadística y de Administración Económica (ENSAE), Francia

RESUMEN

En el presente artículo se comparan las características de los sistemas de jubilación mediante capitalización y reparto, en un modelo de crecimiento de dos generaciones traslapadas. Se analizan los efectos de la capitalización sobre la acumulación de capital; la dosificación óptima entre ambos sistemas de acuerdo con la tasa de crecimiento demográfico y la evolución de los sistemas de reparto y capitalización puros en regímenes demográficos inestables. Partiendo de los supuestos asumidos, la capitalización pura es preferible en una situación de alto crecimiento demográfico y la proporción de reparto debiera incrementarse a medida que se reduce la tasa de crecimiento. Además, se demuestra que en un régimen demográfico inestable, la capitalización ejerce un efecto perverso sobre la desigualdad intergeneracional del ingreso, en detrimento de las generaciones numerosas.

(JUBILACIÓN) (MODELOS) (PENSIONES DE JUBILACIÓN) (SISTEMAS DE JUBILACIÓN)

* Este artículo fue publicado originalmente en *Annales d'Economie et de Statistique*, N° 18, 1990.

ABSTRACT

This paper compares the properties of funded and pay-as-you-go pension systems in a growth model with two overlapping generations and two classes. The impact of funding and capital formation, the optimal shares of the two systems according to the population growth rate and the behaviours of pure funding and pure pay-as-you-go systems in a non-stable population are discussed. It is shown that, under the assumptions of the model, the share of unfunded pensions should decrease when the population growth rate declines. Furthermore, in a non-stable population, it is shown that funding has the perverse outcome of increasing intergenerational equality at the expense of large cohorts.

(RETIREMENT) (MODELS) (RETIREMENT PENSIONS)
(PENSION SCHEMES)

INTRODUCCIÓN

La jubilación mediante capitalización suele justificarse esgrimiendo, total o parcialmente, tres argumentos. En primer término, la capitalización posibilitaría el manejo de la economía a un nivel de mayor intensidad de capital, gracias al ahorro que genera, lo que en términos generales se considera positivo. Segundo, ofrecería un mejor rendimiento que el reparto en un contexto demográfico envejecido, como el que se prevé para el siglo XXI. Por último, y desde el punto de vista de una sucesión de bruscos cambios demográficos y no sólo de una tendencia al estancamiento o disminución de la población, se suele considerar que la capitalización ofrecería una mayor protección por el hecho de distribuir sus efectos a lo largo del tiempo.

El objetivo del presente artículo es examinar estos tres argumentos, con el fin de demostrar que todos, si bien en distintos grados, deben matizarse. Específicamente, nos proponemos demostrar que perfectamente podrían concebirse configuraciones de la economía en que:

1 La capitalización no tiene efectos a largo plazo sobre la intensidad de capital en la economía, a menos que se acepte que adquiera una magnitud considerable y sustituya a todas las demás modalidades de ahorro;

2. En caso de que se acepte esta situación, lo que justifica la extensión de la capitalización no es el régimen demográfico envejecido; por el contrario, dicho régimen justifica más bien la existencia de un sistema mixto con una cierta dosis de reparto, mientras que la capitalización pura se convierte en la alternativa óptima cuando la tasa de crecimiento demográfico es elevada.

3 Por último, la capitalización amplificaría las consecuencias de los bruscos cambios demográficos, en lo que respecta a la desigualdad del nivel de vida entre generaciones sucesivas.

Estableceremos el primer resultado mediante un modelo del tipo Diamond-Samuelson (Diamond, 1965; Samuelson, 1975a y 1975b), es decir, un modelo de Solow con dos generaciones imbricadas. La única modificación importante del modelo será la distinción de dos categorías de ahorrantes:

capitalistas –o ahorrantes estructurales– que ahorran en todos los casos considerados, y *asalariados*, cuyos ahorros sólo contribuyen a preparar la jubilación y que, por lo tanto, pueden ser nulos en caso de que el sistema de reparto los haga inútiles.[1] En este modelo, el comportamiento de los ahorrantes estructurales es bastante pasivo, lo que explica que haya acumulación de capital incluso en un sistema de reparto puro, aunque se deduce de inmediato que esta característica es responsable de una cierta neutralidad del sistema de jubilación con respecto al de acumulación, según la lógica de la paradoja de Pasinetti. Ella expresa que el ahorro de los capitalistas es el que determina, en general, la intensidad de capital de la economía. Cabe señalar que esta neutralidad difiere notablemente de la neutralidad ricardiana propuesta en un contexto similar por Barro (1974) y que sólo desaparece en virtud de la hipótesis según la cual el ahorro de los asalariados es tan alto que excluye totalmente cualquier otra forma de ahorro, lo que lleva a retomar los modelos originales de Diamond y Samuelson.

En ese marco de exclusión absoluta se establecerá el segundo resultado, según el cual –en un contexto demográfico enlentecido– el reparto no debe reducirse sino ampliarse. Esto incide en el método de cálculo del ahorro con fines de jubilación, que supone un riesgo de ahorro excesivo en casos de tasas de crecimiento demográfico muy bajas. Esta misma propiedad conduce a una notable inestabilidad del nivel de vida entre una generación y otra, bajo un sistema de capitalización pura con población fluctuante y de ahorro elevado de las generaciones numerosas, lo que se traduce en una gran intensidad de capital y niveles de vida muy elevados para las generaciones poco numerosas. Evidentemente, ninguno de estos resultados tiene aplicación universal, pues responden a ciertas especificaciones aplicadas en el modelo, aunque demuestran, como mínimo, que en una situación de equilibrio general no es sencillo determinar el sistema óptimo de jubilación, por lo que merece un análisis minucioso.

Este artículo tiene la siguiente estructura: en primer término se presenta un análisis de estática comparativa, examinando el funcionamiento del sistema de acuerdo a distintas tasas de crecimiento demográfico y distintas dosificaciones entre reparto y capitalización. Como ya se ha indicado, el examen se centrará en cómo evoluciona la intensidad de capital con esa dosificación y se procurará determinar si existe una dosificación óptima según el contexto demográfico. A continuación, se abordará el problema de la reacción del sistema a los cambios demográficos bruscos, limitándose

[1] Wolff (1988a) aplica el mismo modelo, que también puede considerarse una aproximación al modelo de tres categorías de ahorrantes estudiado por Dolde y Tobin (1983). Van Praag y Poeth (1975) analizan el funcionamiento de un régimen de capitalización en un marco similar, pero a partir de un modelo Harrod-Domar.

a dos casos extremos de capitalización y reparto puros. Por cierto, más allá de la estática comparada, deberá tenerse en cuenta la previsión de los agentes en cuanto al crecimiento de la población y sus consecuencias; se mostrará que las previsiones correctas son condición indispensable de la viabilidad de la capitalización en un contexto inestable.

2. ESTÁTICA COMPARADA

2.1 Sistema de reparto puro

A continuación se presentan las hipótesis principales del modelo en el marco de un régimen de reparto puro. El modelo considera dos generaciones imbricadas que, en una fecha t, corresponden a los activos y jubilados. Los integrantes de estas dos generaciones se relacionan en una proporción de 1 a $1+n$, en la que n es la tasa de crecimiento demográfico intergeneracional. En cuanto al sistema productivo, se considera una función de producción por individuo activo $f(k)$, que se supondrá sistemáticamente del tipo Cobb-Douglas, donde

$$f(k) = k^{\alpha} \qquad [1]$$

k es el capital per cápita. Además, las remuneraciones de los factores de producción son competitivas. Por ende:

$$p=f'(k)=\alpha k^{\alpha-1} \qquad [2]$$

para el capital, y

$$w=f(k)-kf'(k)=(1-\alpha)k^{\alpha} \qquad [3]$$

para los salarios.

En un régimen de reparto puro, el sistema de jubilación no genera ahorro, por lo que la acumulación de capital debe provenir de otra fuente; de ahí la hipótesis sobre una categoría de ahorrantes *estructurales*, que está integrada por hogares cuyos objetivos de acumulación intergeneracional no se vinculan en absoluto con la preparación para la jubilación; es conocido que esta dicotomía entre agentes con objetivos intrageneracionales e intergeneracionales no difiere en gran medida del comportamiento real de los ahorrantes (Masson, 1988; Wolff, 1988b).[2] Se supondrá que la población de ahorrantes estructurales es exactamente proporcional a la población total, y se admitirá que su ahorro es simplemente una fracción constante σ_c de las ventas de su capital,

[2] También integran esta categoría las empresas (privadas o públicas) que autofinancian la renovación o el crecimiento de su capital.

que en este caso corresponde al capital total existente en la economía. Por ende, el ahorro total en relación con la población activa es:

$$\sigma_c \rho k = \sigma_c \alpha k^{\alpha}. \qquad [4]$$

Considerando una tasa de crecimiento demográfico n y una tasa de depreciación del capital δ, la ecuación de equilibrio del capital per cápita es la siguiente:

$$(\delta + n)k = \sigma_c \rho k = \sigma_c \alpha k^{\alpha} \qquad [5]$$

lo que se traduce en

$$k = \left[\frac{\sigma_c \alpha}{\delta + n}\right]^{1/(1-\alpha)} \qquad [6]$$

En el resto del texto se supondrá que $\delta = 1$, lo que impedirá el comportamiento anormal del modelo cuando $n \leq \delta$[3] y, a la vez, representa un orden de magnitud realista (que equivale, aproximadamente, a 30 años de vida media del capital). Sobre esta base se ha deducido la siguiente tasa de salario:

$$w = (1-\alpha)\left[\frac{\alpha\, \sigma_c}{1+n}\right]^{\alpha/(1-\alpha)} \qquad [7]$$

Por último, se supondrá que el sistema de jubilación está administrado con el fin de garantizar un nivel de vida paritario entre los activos y jubilados. Esto lleva a deducir del salario de los activos un monto:

$$\pi w = \frac{w}{2+n} \qquad [8]$$

tal que la pensión r de los jubilados y el nivel de consumo c de los activos, luego de la deducción, corresponde a:

$$c = r = (1-\alpha)(\alpha\sigma_c)^{\alpha/(1-\alpha)}(1+n)^{(1-2\alpha)/(1-\alpha)}\ \frac{1}{2+n} \qquad [9]$$

[3] En último término, si $n < -\delta$, la relación capital/trabajo y el nivel de vida se incrementan indefinidamente a lo largo del tiempo, aunque no haya ahorro (!) en tanto que la disminución aún más rápida de la población siempre es favorable para el nivel de vida global, independientemente de la magnitud de la carga de las jubilaciones. En relación con esta paradoja, véase Samuelson (1975a), Deardoff (1976) y Blanchet (1988b), en los que se analiza un modelo en tiempo continuo.

Lo anterior indica que, dada la condición realista en que $\delta < 1/2$, la curva de c en función de n será acampanada, con su máximo en:

$$n^* = \frac{1-3\,\alpha}{\alpha} \qquad \textbf{[10]}$$

Por debajo de este óptimo demográfico, el efecto dominante de las variaciones de n es el que influye sobre la razón entre activos y jubilados. Una baja de n reduce el nivel de vida, porque disminuye esta razón, mientras que c tiende a cero cuando n tiende a -1, es decir, su valor mínimo. Por encima de n^*, el efecto dominante es el que influye en la relación capital/trabajo; un incremento de n disminuye el nivel de vida, porque reduce esa relación, en tanto que c también tiende a cero cuando n tiende a $+\infty$. También se observa que cuando $\alpha = 1/3$, que no es un valor anormal, se traduce en $n^* = 0$, un resultado cómodo, ya que evita los problemas provocados a muy largo plazo por un valor óptimo, ya sea positivo o negativo. En general, de ahora en adelante se utilizará este valor de α en todas las aplicaciones numéricas.

Cabe hacer otros dos alcances.

- Suponer que un sistema de reparto como el descrito satisface a los agentes equivale a asignarle la siguiente estructura de preferencias intertemporales:

$$\mathrm{U}\,(c,\, r) = \min\,(c,\, r) \qquad \textbf{[11]}$$

lo que impide toda posibilidad de sustitución entre niveles de vida de los dos períodos de la existencia. Esta hipótesis simplifica considerablemente el resto del análisis, aunque es algo exagerada. En el anexo 1 se presenta una generalización de los resultados de esta primera parte, obtenida de acuerdo a la hipótesis de una función de utilidad intertemporal isoelástica, aplicada comúnmente en los modelos de ciclo de vida.

- En segundo término, la ecuación **[9]** indica que, dado n, cualquiera sea su valor, el consumo máximo de los asalariados se obtiene cuando $\sigma_c = 1$. Esta tasa de ahorro corresponde a la regla de oro de la acumulación, pues se sabe que asegura también un máximo de consumo total per cápita. En tal caso, el capital por activo es el siguiente:

$$k = \left[\frac{\alpha}{1+n} \right]^{1/(1-\alpha)} \qquad \textbf{[12]}$$

por lo que

$$\rho = 1 + n \quad [13]$$

lo que implica una rentabilidad del capital idéntica a las tasas de crecimiento de la población. Cabe recordar que, en este caso en particular, la capitalización tiene el mismo rendimiento marginal que el régimen de reparto; los dos son iguales a la tasa de crecimiento demográfico n. Por lo tanto, el reparto será óptimo, independientemente del valor de n, si bien puede no ser el único óptimo. Es óptimo porque el ahorro estructural le asegura el máximo tamaño de la torta que se distribuirá entre generaciones, en tanto que el reparto igualitario asegura en una etapa posterior una redistribución óptima. En adelante, descartaremos este caso particular y todos los cálculos se basarán en $\sigma_c < 1$.

2.2 Funcionamiento de un sistema mixto

A continuación examinaremos el caso general de un sistema mixto y se considerará que funciona de la siguiente manera:

- Existe un sistema de reparto, en el que la tasa de cotización aplicada al ingreso de la población activa se encuentra acotada por un valor máximo de $\bar{\pi}$. Esta imposición de un máximo puede responder al deseo de limitar el monto de los descuentos obligatorios (la obligatoriedad es una condición que deben cumplir todos los sistemas de reparto).
- Mientras la tasa de crecimiento demográfico sea alta, este sistema logra garantizar un nivel de vida idéntico a las dos categorías etarias, por lo que la población activa pierde toda motivación para ahorrar, suponiendo que mantiene la estructura de preferencias descrita en **[11]**. Sin embargo, por debajo de un determinado valor de n, el sistema pasa a ser insuficiente porque las cotizaciones de la población activa han alcanzado su nivel máximo. Por lo tanto, los activos procederán a capitalizarse para obtener el complemento de la jubilación que desean, lo que se traduce entonces en un sistema que consta de dos partes.[4]

Evidentemente, dentro de este sistema encontramos dos casos particulares, los de capitalización y reparto puros. El reparto puro se da en el caso de $\bar{\pi} = 1$, en el que nunca se requiere capitalización, independientemente del valor de n. La capitalización pura corresponde al caso límite simétrico $\bar{\pi} = 0$. Además, debe suponerse que la capitalización es siempre auténtica, es decir, que corresponde a una acumulación efectiva

[4] En este sistema, la capitalización puede ser absolutamente individual o bien quedar a cargo de un fondo de pensiones, pero en este contexto no nos interesa tal distinción. Los dos casos son equivalentes a partir del momento en que se supone que el administrador del fondo elige el ahorro y las colocaciones que hacen las personas, supuesto que se mantendrá de aquí en adelante.

de capital productivo y no a colocaciones puramente financieras destinadas a financiar el consumo corriente; estas últimas representan un tipo de capitalización que no tiene efectos reales en lo que respecta a la acumulación y que no difiere fundamentalmente del régimen de reparto. Por último, debe considerarse que en la economía existe un tipo de agentes cuyo único ingreso proviene del capital que han acumulado, que en cada período ahorran una fracción σ_c de dicho capital, y que dicho ahorro no tiene como miras la jubilación.

Se procurará determinar, sucesivamente, el nivel de vida que ofrece este sistema a los activos y a los jubilados, de acuerdo con el valor de n y los valores de σ_c y $\bar{\pi}$, lo que lleva a analizar, como variable intermedia, la intensidad de capital de la economía en función de estos parámetros. Luego, se procurará determinar el sistema óptimo en régimen permanente.

2.3 Intensidad de capital y nivel de vida con dos categorías de ahorrantes

El sistema propuesto implica que, en determinados casos, no se produce capitalización, lo que conduce a la situación descrita en la sección 2.1.Esta se mantiene mientras el valor de π que garantiza la igualdad del ingreso de las dos categorías etarias sea inferior a $\bar{\pi}$, es decir, siempre que se dé lo siguiente:

$$\frac{1}{2+n} < \bar{\pi} \qquad [14]$$

Mientras subsista esta relación, el nivel de consumo c común a las dos categorías etarias sigue siendo el definido por la fórmula **[9]**.

De lo contrario, hay capitalización y el estado de equilibrio definitivo de la economía puede caracterizarse mediante un sistema de cuatro ecuaciones: i) la que describe el equilibrio del capital en poder de los ahorrantes estructurales; ii) la que define la masa de capital de los fondos de pensiones; iii) la que describe el capital total como suma de sus dos componentes y, por último, iv) la ecuación que determina el comportamiento del ahorro de la población activa con miras a la jubilación. Este último depende de la jubilación básica aportada por el sistema de reparto y de la rentabilidad corriente del capital. El volumen de capital total por individuo activo seguirá denominándose k; el volumen de capital en poder de los capitalistas y de los fondos de pensiones se denominarán k_c y k_r, respectivamente. Por último, σ_a designará la tasa de ahorro de la población activa con miras a la jubilación. Por tanto, la notación del sistema de cuatro ecuaciones es:

$$
\begin{aligned}
&k_c(1+n) = \sigma_c \alpha k^{\alpha-1} k_c \\
&k_r(1+\mathrm{n}) = \sigma_a (1-\alpha) k^{\alpha} \\
&k_c + k_r = k \qquad\qquad [15] \\
&1 - \tilde{\pi} - \sigma_a = \tilde{\pi}\,(1+n) + \sigma_a \alpha k^{\alpha-1}
\end{aligned}
$$

Se constata que la primera de estas cuatro ecuaciones se traduce, al igual que en el caso de reparto puro, en la siguiente:

$$
k = \left[\frac{\alpha\sigma_c}{1+\mathrm{n}} \right]^{1/(1-\alpha)} \qquad [16]
$$

Esto nos lleva a la situación paradójica de Pasinetti (1962): en este modelo, la acumulación total es determinada por el comportamiento del ahorro de una sola categoría de ahorrantes, y la capitalización con miras a la jubilación no produce ninguna acumulación suplementaria a la de equilibrio, mientras subsista el otro tipo de ahorro. Esto nos ofrece la primera evidencia de neutralidad del sistema de jubilación frente a la acumulación de capital, y se observa en qué difiere esa neutralidad de la deducida por Barro (1974) con un argumento ricardiano. Cabe recordar que, según Barro, la neutralidad supone que los agentes prevén los cargos futuros que supone el sistema de reparto y ahorran con el objeto de cubrirlos, tal como ahorrarían con miras a la jubilación si no existiera un sistema de reparto.[5]

Se trata de una neutralidad en el plano del comportamiento individual y, por consiguiente, es observable a corto plazo. En el caso de este análisis, la neutralidad responde a la transferencia de riqueza entre categorías de individuos con distintos comportamientos y sólo se manifiesta en un equilibrio a largo plazo. Concretamente, esta transferencia de riqueza se da de la siguiente manera: si se produce capitalización, esta se traduce en un incremento *transitorio* del capital nacional, que reduce el rendimiento. Esto redunda en una baja del ingreso y la acumulación de los ahorrantes estructurales, que se compensa plenamente, en el plano macroeconómico, con el aumento de los fondos de jubilación.

Esta neutralidad no impide que las condiciones de vida de los asalariados se modifiquen respecto a cuando no hay capitalización, pero significa que estas modificaciones sólo van a provenir de una distinta repartición de un producto per cápita que se mantiene inalterado. De hecho, la modificación es doble en el caso de los asalariados. Por una parte, ellos aseguran la distribución igualitaria de su consumo entre los dos períodos

---

[5] Se trata de cargos que realmente recaerán sobre sus hijos, por lo que el resultado de Barro supone un altruismo intergeneracional.

de su vida, lo que no se garantiza en el sistema de reparto con cotizaciones acotadas. Por otra parte, su nivel medio de vida a lo largo de ésta también se ve modificado por el hecho de que ahora son "parcialmente capitalistas", por intermedio de su fondo de pensiones. Ello se logra renunciando a una fracción determinada de su consumo durante su vida activa, pero que les permite recuperar, mediante la rentabilidad obtenida, parte del ingreso del capital nacional. ¿Cuál es este nivel de vida c? De la cuarta ecuación del sistema **[15]** se deduce lo siguiente, teniendo en cuenta el valor de k:

$$\sigma_a = \frac{1-\tilde{\pi}\,(2+n)}{1+\alpha k^{\alpha-1}} = \frac{\sigma_c(1-\tilde{\pi}\,(2+n))}{\sigma_c+1+n} \qquad \textbf{[17]}$$

de donde

$$c = (1-\tilde{\pi}-\sigma_a)w = (1-\alpha)(\alpha\sigma_c)^{\alpha/(1-\alpha)}(1+n)^{(1-2\alpha)/(1-\alpha)}\frac{1-\tilde{\pi}+\tilde{\pi}\,\sigma_c}{\sigma_c+1+n} \qquad \textbf{[18]}$$

Se puede constatar que la doble condición de $\sigma_c < 1$ y $1/(2+n) > \tilde{\pi}$ implica que esta expresión es superior al nivel de consumo en régimen de reparto puro presentada en **[9]**.

2.4 Sistema óptimo y desplazamiento total de los ahorrantes estructurales

Es posible imaginar una situación en que la capitalización conduzca efectivamente a una mayor intensidad de capital y del producto per cápita. Los cálculos mencionados *supra* sólo son válidos en la medida que la fracción del capital en poder del fondo de pensiones sea inferior a uno. De lo contrario, se da que $k_c = 0$, la primera ecuación del sistema desaparece y los razonamientos anteriores no se aplican. ¿Es posible que se dé tal situación? De la segunda ecuación del sistema **[15]** y los valores de σ_a y k, se deduce que:

$$\frac{k_f}{k} = \frac{\sigma_a(1-\alpha)}{1+n}k^{\alpha-1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\,\frac{\sigma_a}{\sigma_c} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\,\frac{1-\tilde{\pi}\,(2+n)}{\sigma_c+1+n} \qquad \textbf{[19]}$$

En efecto, esta relación puede ser igual a uno, lo que significa que $k_c = 0$, para lo cual basta con que se dé la siguiente situación:

$$\frac{1-\tilde{\pi}\,(2+n)}{\sigma_c+1+n} > \frac{\alpha}{1-\alpha} \qquad \textbf{[20]}$$

Dicha situación se produce cuando el ahorro con miras a la jubilación adquiere gran importancia en relación con el ahorro de los capitalistas, cuyo efecto es la absoluta eliminación de este último. Tal sería el caso cuando $\bar{\pi}$ o n tienen valores muy bajos, lo que indicaría una limitada eficacia del sistema de reparto, que se compensaría con un ahorro cuantioso de los asalariados, o si la misma σ_c también fuera baja. ¿Cuál sería, entonces, el estado de la economía? Como k_c=0 y $k_r = k$, la ecuación **[15]** se reduce a:

$$k(1 + n) = \sigma_a (1-\alpha)k^{\alpha} \qquad \textbf{[21]}$$
$$1 - \bar{\pi} - \sigma_a = \bar{\pi} (1 + n) + \sigma_a \alpha k^{\alpha - 1}$$

Esto nos remite a la argumentación anti-Pasinetti de Samuelson y Modigliani (1966), en la que sólo el comportamiento de ahorro de los asalariados determina la acumulación total, dado que la otra categoría de agentes ha desaparecido por completo[6]. Esta es la hipótesis que plantean implícitamente Diamond (1965) y Samuelson (1975a y b). La resolución de la ecuación **[21]** nos lleva a la siguiente expresión:

$$\sigma_a = 1 - \bar{\pi}\ (2 + n) - \frac{(1 + n)\alpha}{1-\alpha} \qquad \textbf{[22]}$$

y a:

$$k = \left[\frac{1 - (2 + n)(\alpha + \bar{\pi} - \alpha\bar{\pi})}{1 + n}\right]^{1/(1-\alpha)} \qquad \textbf{[23]}$$

La intensidad de capital a largo plazo k depende en este caso de la magnitud del sistema de reparto: cuanto menor sea la amplitud ($\bar{\pi}$ pequeña) tanto mayor será la intensidad del capital. El resultado obtenido es más intuitivo, pero ello ocurre a costa de reforzar la hipótesis de que el ahorro con vistas a la jubilación habrá reemplazado por completo las otras categorías de ahorro.

Evidentemente, en este marco es necesario buscar un sistema óptimo *para los asalariados*. Las situaciones sin exclusión de otro tipo de ahorrantes no pueden ser óptimas, pues llevan a un nivel de producción neto per cápita menor que el de la regla de oro, que los asalariados sólo recuperarán una porción. En la situación de exclusión total, el sistema óptimo puede calcularse efectuando un desarrollo completo de la expresión de c. Sin embargo, resulta más directo expresar simplemente que la tasa de ahorro nacional [$(1- \alpha) \sigma_a$] debe ser igual a la tasa α de la regla de oro, es decir:

[6] No se trata aquí de determinar si se puede seguir clasificando como "asalariados" a una categoría de agentes que poseen la totalidad del patrimonio nacional, como afirman Samuelson y Modigliani, puesto que sólo se han convertido en "capitalistas" a través del fondo de pensiones respectivo.

$$\sigma_a = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \qquad [24]$$

Si tenemos en cuenta la expresión **[22]**, esto implica que:

$$\hat{\pi}_{opt} = \frac{1}{2 + n} - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \qquad [25]$$

que debe interpretarse como la tasa de impuesto óptima del sistema de reparto puro $1/(2+n)$, menos la tasa de capitalización que asegura la acumulación óptima. Ahora bien, resulta que esta tasa $\hat{\pi}_{opt}$ es una función decreciente de n, lo que significa que *es preciso intensificar el reparto cuando la tasa de crecimiento demográfico disminuye*, lo que constituye el segundo resultado anunciado en la introducción. Este hecho se explica por el comportamiento ahorrativo de los asalariados: la reducción del crecimiento demográfico implica una disminución del rendimiento del capital y el ahorro reacciona en forma positiva a esta baja ya que es preciso aumentar el ahorro para igualar el nivel de vida en los dos períodos de existencia. En este caso, se corre el riesgo de acumulación excesiva, que reducirá las pensiones pagadas por el sistema de reparto. En el anexo 1 se demuestra que este resultado sigue siendo válido para una clase más amplia de comportamientos de ahorro que los expuestos en el presente artículo. También puede observarse que, en rigor, si la situación demográfica es muy favorable, es decir si el valor de n es elevado, tendremos que $\hat{\pi}_{opt}$ es negativo, es decir, que el óptimo corresponde a una situación contraria al sistema de reparto, con transferencias obligatorias de las personas viejas a las jóvenes. Esto es así porque el rendimiento del capital es elevado; en tal caso, un sistema de capitalización puro basta sólo un poco de ahorro para emparejar el consumo a lo largo de la vida, produciéndose, en consecuencia, una subacumulación. En consecuencia, es preciso intensificar el ahorro de los activos, lo que ellos harán si saben que en $t+1$ se les aplicarán impuestos en favor de los grupos etarios más jóvenes. Si este mecanismo es irrealizable desde un punto de vista institucional, habrá que limitarse al óptimo de esquina correspondiente a $\hat{\pi} = 0$. También se observa el logro de una situación óptima en la capitalización pura cuando n es igual a la tasa de crecimiento demográfico óptimo n^* indicada anteriormente, es decir, $(1-3\alpha)/\alpha$.[7]

Estos resultados parecen paradójicos, pues conducen a preferir los sistemas de capitalización en situaciones de crecimiento demográfico acelerado en que, en principio, los sistemas de reparto tiene un rendimiento muy alto. La explicación de tal paradoja se funda, evidentemente, en un razonamiento de equilibrio general. Así las cosas, la paradoja es menos

[7] Este resultado constituye el "*serendipity theorem*" enunciado por Samuelson (1975a).

extrema de lo que parece ya que la ecuación [25] no significa que sea necesario *sustituir* los sistemas de reparto por los de capitalización cuando n disminuye. En todo caso, cuando n es menor, habrá que realizar mayores esfuerzos para preparar la jubilación. En consecuencia, no hay motivo para disminuir la importancia absoluta del sistema de capitalización. Lo que debe lograrse es que permanezca fijo el nivel absoluto de la capitalización y recurrir a los sistemas de reparto para asegurar los complementos necesarios si el crecimiento demográfico se desacelera o se hace negativo.

Puede verse que el balance global tiene muchos matices. Desde cierto punto de vista, se justificaría efectivamente un sistema mixto y, como hemos heredado históricamente un sistema de reparto, parecería aconsejable promover el desarrollo de un sistema de capitalización complementario. De este modo, es deseable incluir una cierta dosis de capitalización, aún si resulta evidente que esta decisión no se justifica mediante argumentos de orden demográfico, sino más bien todo lo contrario. Pero este sistema mixto tiene ventajas y desventajas. En todos los casos, entrañaría una transferencia de riqueza entre la categoría de los ahorrantes estructurales y la de los asalariados y, en última instancia, si se desea lograr un sistema óptimo para los asalariados, cabe prever la desaparición completa del patrimonio detentado por los ahorrantes estructurales.[8] Ahora bien, cabe preguntarse si tal situación es al mismo tiempo factible y deseable. Es posible que la alternativa preferida sea estimular el ahorro por otros medios que no sean la manipulación del sistema de jubilaciones y continuar asegurando las jubilaciones sólo a través de las transferencias directas entre generaciones. Ante esta incertidumbre, pueden invocarse otros criterios de apreciación en favor de una u otra solución, entre los que cabe mencionar los referidos a su estabilidad relativa, lo que nos lleva al tercer punto señalado en la introducción, es decir, la forma en que los dos sistemas reaccionan en situaciones de evolución demográfica irregular.

3. COMPORTAMIENTO DE LOS DISTINTOS SISTEMAS EN UN ENTORNO DEMOGRÁFICO INESTABLE

Los resultados precedentes sólo son válidos si el crecimiento es perfectamente equilibrado. En consecuencia, para seleccionar un sistema determinado será importante saber cómo reacciona ante las *fluctuaciones* del crecimiento demográfico además de conocer su *tendencia*. Sobre este tema, la idea corriente es que los sistemas de capitalización absorben mejor los *shocks* demográficos que los sistemas de reparto. De hecho, conforme a nuestras hipótesis, el problema se hace algo más complejo y es interesante

[8] El problema de la apropiación total del capital nacional por los fondos de pensiones ya fue planteado por Bourgeois-Pichat (1978) en un estudio realizado en condiciones de equilibrio parcial, pero proponiendo un tratamiento más realista de los parámetros demográficos.

examinarlo un poco más a fondo. Evidentemente, la extrapolación de las conclusiones que surjan de este análisis deberá hacerse con prudencia. Cuando la evolución demográfica es inestable, cualquier modelo que sólo tenga en cuenta dos generaciones imbricadas de personas en actividad y de jubilados constituye una simplificación de la realidad mucho más marcada que si se tratara de procesos de crecimiento proporcionales regulares. Sin embargo, este primer enfoque sugiere al menos los aspectos que deben tenerse en cuenta en el desarrollo de modelos más realistas, en los que la edad se considere como una variable continua.[9]

También es una simplificación comparar exclusivamente los sistemas de reparto puros y los de capitalización pura. En este último caso, supondremos, además, que la capitalización resulta ser la única fuente de ahorro, mientras que en el caso de los sistemas de reparto puros mantendremos la hipótesis de que siempre existe una clase de capitalistas que, en cada uno de los períodos, ahorran una fracción σ_c de la renta total del capital. En cambio, en un entorno inestable se agregará una complicación complementaria debida a que el comportamiento del sistema de capitalización depende de las *previsiones* de los agentes sobre la demografía y el entorno económico: el monto ahorrado con vistas a la jubilación depende efectivamente de las proyecciones sobre el rendimiento del ahorro para el período siguiente. Es bien sabido que el rendimiento depende del valor de la razón capital/trabajo vigente a esa fecha, o lo que es lo mismo, depende a la vez del esfuerzo de ahorro que realiza la población activa en el período vigente y de la cantidad de trabajo disponible en el período siguiente. El problema se reduce a saber si los individuos tienen o no en cuenta este hecho en sus planes de jubilación. En este sentido, resulta interesante comparar dos hipótesis corrientes. La primera consiste en suponer que los agentes consideran la rentabilidad del capital como dato exógeno y se limitan a extrapolar el valor corriente (previsiones miopes). La segunda es la hipótesis de las previsiones perfectas y equivale a suponer que los agentes conocen las condiciones demográficas que corresponden al período $t + 1$ [10] y que saben de qué manera se verá afectada la productividad del capital y cómo incidirán en ella sus propias decisiones en materia de ahorro. Se trata, evidentemente, de una hipótesis extrema, aunque no totalmente anormal si la administración de las jubilaciones por capitalización está a cargo de un fondo centralizado que, se presume, está mejor capacitado que los agentes aislados para realizar previsiones complejas.

[9] Para un enfoque de este tipo, véase Blanchet (1988a).

[10] Esta hipótesis es aceptable porque la población activa de t + 1 está constituida por niños ya nacidos.

Cuadro 1

VARIABILIDAD DEL CAPITAL PER CÁPITA Y DE LOS NIVELES DE VIDA DE LOS ACTIVOS Y JUBILADOS CUANDO *n* FLUCTÚA ALREDEDOR DE CERO

Tipo de sistema	$\frac{\mathrm{Var}(k)}{k^2}$	$\frac{\mathrm{Var}(c)}{k^2}$	$\frac{\mathrm{Var}(r)}{r^2}$
Sistemas de reparto puros	$\frac{\mathrm{Var}(n)}{1-\alpha^2}$	$\mathrm{Var}(n)\left[\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}+\frac{1}{4}-\alpha\right]$	$\mathrm{Var}(n)\left[\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}+\frac{1}{4}-\alpha\right]$
Sistemas de capitalización con previsiones miopes	$\frac{\mathrm{Var}(n)}{1-4\alpha^2}$	$\mathrm{Var}(n)\ \frac{(3\alpha-1)}{1-4\alpha^2}$	$\mathrm{Var}(n)\left[\frac{\alpha^2}{1-4\alpha^2}+1-2\alpha\right]$
Sistemas de capitalización con previsiones perfectas	$\frac{\mathrm{Var}(n)}{1-2\alpha}$	$\mathrm{Var}(n)\left[\frac{\alpha^2}{1-2\alpha}+1-\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right]$	$\mathrm{Var}(n)\left[\frac{\alpha^2}{1-2\alpha}+1-\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right]$

En total, pueden considerarse tres casos. Primero, los sistemas de reparto puros, en los que la naturaleza de las previsiones no desempeña papel alguno; segundo, los sistemas de capitalización pura con previsiones miopes y, por último, los de capitalización pura con previsiones perfectas. Los cálculos correspondientes a cada opción se indican en los anexos. En el cuadro 1 sólo se indican los resultados correspondientes a situaciones en que las tasas de crecimiento demográfico fluctúan en forma aleatoria y no autocorrelacionada alrededor de cero. Las magnitudes indicadas son las varianzas relativas del capital per cápita k_t, del consumo de los activos c_t y de los ingresos de los jubilados r_t. En el caso de los sistemas de capitalización con previsiones miopes, estas dos últimas magnitudes sólo difieren entre sí en el caso de capitalización con previsiones miopes que, por definición, la igualdad de $c_t = r_t$ y los sistemas de capitalización con previsiones perfectas aseguran automáticamente que $c_t = r_{t+1}$. Todas las varianzas se calculan a partir de los cuadrados de los coeficientes de variación.

Como puede comprobarse, pese a la simplicidad del modelo, estas expresiones no son fáciles de interpretar. Por tanto, es más simple proceder a un análisis gráfico. Esto es lo que se hace en los gráficos 1 y 2, en los

Gráfico 1

VARIABILIDADES DE LOS NIVELES DE VIDA DE LAS PERSONAS ACTIVAS Y LOS JUBILADOS EN FUNCIÓN DE α (n=0)

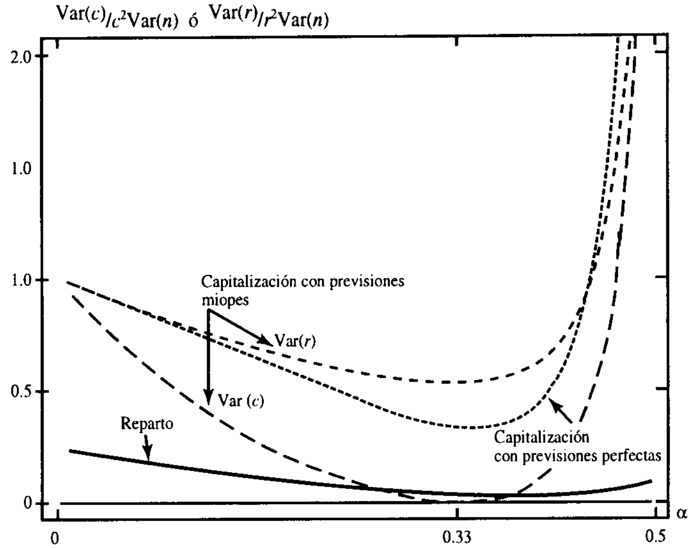
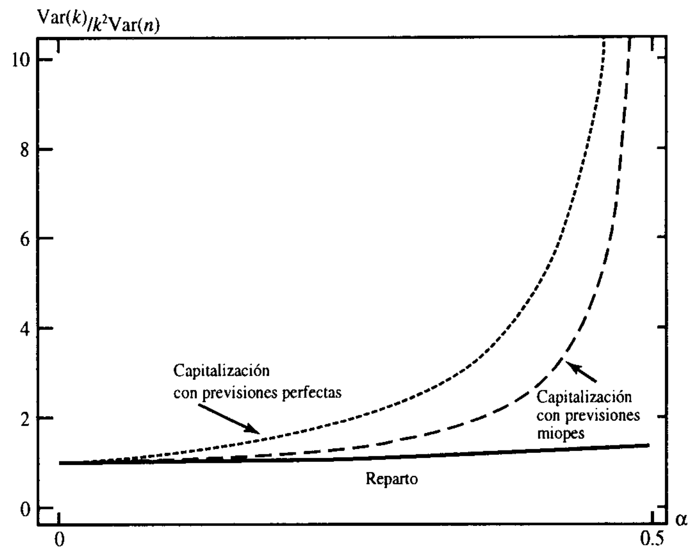


Gráfico 2

VARIABILIDAD DEL CAPITAL POR PERSONA ACTIVA EN FUNCIÓN DE α (n=0)



que se analiza la variabilidad en función de α, limitándonos, como hasta ahora, al caso en que α es menor que $^1/_2$. (Cabe señalar que el punto $^1/_2$ corresponde a una asíntota vertical para varias expresiones del cuadro 1.)

En el gráfico 1 se observa que, por lo general, el sistema de reparto puro produce la variación más pequeña del nivel de vida de un período a otro. La única excepción es la varianza *Var (c)*, del nivel de vida de los activos en un sistema de capitalización con previsiones miopes cuando el valor de α se aproxima a 1/3. Además, se puede comprobar que cuando α es exactamente igual a ese valor, la *Var (c)* es estrictamente igual a cero: en este caso muy particular, la regla de comportamiento y las previsiones realizadas por los activos los llevan a adoptar siempre los mismos niveles de consumo, sea cual fuere su remuneración laboral.[11]

Sin embargo, esto no significa que estas personas estabilicen su jubilación. Por el contrario, si no se cumplen sus previsiones, encontrarán que los montos de las pensiones fluctuarán considerablemente. La capitalización con previsiones perfectas implica varianzas intermedias entre las de c_t y r_t obtenidas para previsiones miopes, pero que se mantienen muy por arriba de la varianza obtenida con el sistema de reparto puro.Estos resultados pueden ser entendidos a partir de las simulaciones presentadas en los cuadros 2a y 2b, fundados en la hipótesis particular de una población perfectamente cíclica, es decir, una población en que se alternan en forma regular generaciones poco numerosas (ralas) y generaciones numerosas. Estos valores se determinaron suponiendo que la relación entre los efectivos de las generaciones numerosas y las ralas es de 6/5, es decir, los efectivos varían aproximadamente en un ±10% respecto a la media, considerando siempre que $\alpha = 1/3$ y, en el caso de los sistemas de reparto, que $\sigma_c = 1$.

En el cuadro 2a se observa que este caso particular implica una clasificación de las varianzas de los niveles de vida de los activos y jubilados idéntica a la que resultaría de un valor de n_t meramente aleatorio. En el caso del sistema de reparto puro, esta variabilidad corresponde a la alternancia entre un nivel de vida global elevado cuando la generación numerosa está en actividad y bajo cuando ésta se jubila. Sin embargo, se observa que la relación entre los valores altos y bajos del nivel de vida llega sólo a 1.095 y no al valor de 1.2 que se hubiera obtenido en una situación de equilibrio parcial con sólo modificar el coeficiente de carga correspondiente a los activos. La explicación de este fenómeno está vinculada, sin duda, a la fluctuación de la masa de capital: en el cuadro 2b se aprecia que las generaciones ralas se benefician en actividad de un capital por trabajador más elevado y las generaciones numerosas de un capital per cápita menor.

---

[11] En términos generales, la ecuación (64) que figura en los apéndices, permite deducir que esto ocurre cuando los valores de n y α son tales que $n = (1-\alpha)/\alpha$, es decir, cuando la tasa de crecimiento demográfico absoluto es la óptima, n^*.

Esta evolución contracíclica de k_t compensa parcialmente esta relación de dependencia, lo que beneficia a activos y jubilados, puesto que se trata de un sistema redistributivo.

En el caso de los sistemas de capitalización con previsiones miopes, la dinámica del capital es más compleja. El sistema introduce un nuevo factor de inercia en la evolución del capital per cápita: un nivel elevado de k_t implica una rentabilidad baja del capital y, por ende, la previsión de la rentabilidad también será baja, la tasa de ahorro será elevada y, por lo tanto, *ceteris paribus*, el valor de k_{t+1} será elevado (un mayor nivel de autocorrelación significa que el coeficiente k_{t+1} será más elevado en la ecuación de recurrencia **[56]** incluida en los anexos que en la ecuación **[40]**). Sin embargo, en última instancia, el efecto sobre la varianza de k_t depende de la forma que adopten las variaciones de n_t. Si no existe autocorrelación en n_t, como se supone en los cálculos analíticos, la varianza de k_t se verá reforzada (gráfico 2). Si la autocorrelación de n_t es negativa, como ocurre en las simulaciones, la intensificación del ahorro de las generaciones poco numerosas eleva el monto del capital por trabajador en las generaciones numerosas y reduce el valor de V_k(cuadro 2b). En consecuencia, en este caso no hay consecuencias netas.

Cuadro 2a

NIVEL DE VIDA DE LOS ACTIVOS Y JUBILADOS EN UNA POBLACIÓN CÍCLICA

	Sistema de reparto	Sistema de capitalización con previsiones miopes		Sistema de capitalización con previsiones perfectas	
	Consumo de los activos y los jubilados	Consumo de de los activos	Jubilados	Consumo de de los activos	Jubilados
Generación rala en actividad	0,18311	0,19233	0,16622	0,21691	0,17012
Generación numerosa en actividad	0,20059	0,19232	0,22252	0,17012	0,26191
Valor medio	0,19185	0,19232	0,19437	0,19351	0,19351
Varianza	0,00008	0,00000	0,00079	0,00055	0,00055

Cuadro 2b

CAPITAL POR PERSONA EN ACTIVIDAD EN UNA POBLACIÓN CÍCLICA

	Sistema de reparto	Sistema de capitalización con previsiones miopes	Sistema de capitalización con previsiones perfectas
Generación poco numerosa en actividad	0,22065	0,21427	0,22969
Generación numerosa en actividad	0,16785	0,17217	0,15947
Valor medio	0,19425	0,19322	0,19458
Varianza	0,00070	0,00044	0,00123

En cambio, las previsiones erradas hacen que las generaciones numerosas tengan en definitiva jubilaciones mucho más bajas que en los sistemas de reparto, mientras que lo contrario ocurre en las generaciones ralas. Es evidente que la estabilidad fortuita del consumo de la población activa c_t generada por este sistema no podría compensar la gran desigualdad de los montos de las jubilaciones entre una generación y otra.

A fin de contrarrestar esta inestabilidad, el sistema de capitalización con previsiones perfectas supone que las personas activas de las generaciones ralas ahorran menos, previendo una jubilación fácil y que las personas pertenecientes a las generaciones numerosas ahorran más en previsión de una jubilación difícil. En consecuencia, en este caso se refuerza el comportamiento anticíclico de k_t en relación con los sistemas de reparto, pero en lugar de atenuar las consecuencias de los *shocks* demográficos, las agrava. Si las generaciones ralas disponen, en efecto, de mayor volumen de capital per cápita cuando están en actividad, *esa situación sólo redunda en su propio beneficio*: al disponer de un gran volumen de capital mientras trabajan, perciben salarios elevados que les permiten acumular una jubilación mayor sabiendo además que la rentabilidad del capital será a su vez elevada durante el período de jubilación. En la medida en que para las generaciones numerosas el razonamiento es exactamente inverso, nos encontramos, de hecho, con un trato muy desigual entre generaciones: las generaciones ralas aprovechan globalmente condiciones más ventajosas vigentes durante su vida, mientras que las generaciones numerosas vienen en condiciones deterioradas. Entonces, si bien se tiene un sistema más estable desde el punto de vista del ingreso intergeneracional (teniendo en cuenta que en todos los casos c_t es, por definición, igual a r_{t+1}), habrá un sistema más inestable desde el punto de vista de las condiciones de vida de las generaciones sucesivas (siendo c_t muy distinto de c_{t-1} y r_t).

4. CONCLUSIONES

Es obvio que los resultados obtenidos en el presente trabajo pueden depender de diversos aspectos de la descripción de la economía que se ha conservado a lo largo de todo el artículo. Sin embargo, ponen de relieve al menos algunos de los problemas muy concretos que plantea la aplicación de un sistema de capitalización. Por un lado, si el contexto demográfico futuro no se contrapone a la elección de un sistema mixto, no hay cómo justificar la aplicación de un sistema de capitalización pura, cuya puesta en marcha plantearía de todos modos problemas insuperables y que, desde un punto de vista estrictamente teórico, se justifica más bien en una situación de crecimiento demográfico acelerado. Además, si el sistema mixto puede mejorar de forma duradera los niveles de vida de las personas activas y de los jubilados, ello se debe, en primer lugar, a un fenómeno de exclusión de otras formas de ahorro, con una transferencia indirecta de riqueza entre "capitalistas" o ahorrantes estructurales y asalariados/jubilados. En consecuencia, no se puede considerar que este sistema es preferible en todos los casos porque redundaría en una pérdida para algunos individuos. El resultado sería una nueva situación que podría estimarse mejor desde el punto de vista de la distribución de los ingresos: este es un aspecto que podría apreciarse en un modelo más desagregado y realista del que el modelo propuesto en el presente trabajo no sería más que una maqueta. En todo caso, hemos visto que sólo sobre la base de un supuesto muy fuerte la capitalización puede modificar en forma duradera la relación capital/trabajo y, en consecuencia, el producto total: esto sólo ocurre si se excluye cualquier otra forma de acumulación de capital, una situación que puede considerarse poco realista y, además, poco deseable.

En la segunda parte ya hemos señalado los problemas aún más complejos que plantea la gestión de la capitalización en un entorno inestable. En primer lugar, puede mencionarse el de la naturaleza de las previsiones que deben sustentar esta gestión. Cabe preguntarse si es preciso que esta gestión tenga en cuenta la degradación del rendimiento del capital que produciría, con el tiempo, una disminución del cuociente activos/jubilados o si es suficiente extrapolar el nivel corriente de los rendimientos incluso corriendo el riesgo de que las previsiones no se cumplan.[12] En segundo lugar, y en el contexto de las previsiones utilizadas para administrar el sistema, es preciso determinar si éstas cumplirán un papel más bien estabilizador o desestabilizador para la economía en su conjunto. En cuanto al aspecto que surgió en último término, hay que decidir si el sistema de jubilación debe privilegiar el equilibrio "longitudinal" de los ingresos, es decir para una misma generación –para cuyo fin el sistema de capitalización es el que

[12] Un comportamiento de este tipo sería, por ejemplo, un entusiasmo excesivo por la capitalización que se deba exclusivamente a un aumento coyuntural de la rentabilidad de las colocaciones financieras.

mejor se adapta– o el equilibrio "transversal", es decir, la igualación de los niveles de vida de las generaciones que coexisten en un momento dado en la economía, lo que parece más fácil realizar utilizando un sistema de reparto.

ANEXO 1

ESTÁTICA COMPARATIVA CON UNA UTILIDAD INTERTEMPORAL ISOELÁSTICA

En el presente anexo se retoman los cálculos realizados en la primera parte del artículo teniendo en cuenta hipótesis más generales relativas a las preferencias intertemporales de los asalariados. El hecho de que la dosis óptima de los sistemas de reparto aumente cuando cae la tasa de crecimiento demográfico (véase la relación **[25]**) es consecuencia de que el ahorro con vistas a la jubilación aumenta al disminuir la tasa de crecimiento demográfico. Ahora bien, este resultado, establecido para el caso de una función de utilidad complementaria U (c, r) de hecho resulta de dos relaciones simultáneas:

- La dependencia de la tasa de ahorro de los asalariados con respecto al crecimiento demográfico y la tasa de interés;
- La dependencia de la tasa de interés con respecto al crecimiento demográfico y a la tasa de ahorro (a través de la relación capital/trabajo).

En el caso general, la relación entre n y la tasa de ahorro que resulta de esta interdependencia es de signo ambiguo. En particular, cabe preguntarse si no depende fundamentalmente del efecto de la tasa de interés sobre el ahorro. Sabemos que éste se compone de un efecto negativo sobre el ingreso (la disminución del ahorro es suficiente para uniformar el nivel de vida a lo largo de la existencia) y un efecto positivo, de sustitución intertemporal (una tasa de interés elevada alienta a postergar el consumo). Este último efecto es nulo con la función de utilidad complementaria **[11]** pero aumenta con una utilidad cuyos argumentos son sustituibles y termina por compensar totalmente el efecto ingreso en el caso límite de una función de utilidad de Cobb-Douglas. En consecuencia, conviene retomar los cálculos con una función de utilidad que integre todas estas posibilidades, a saber, la función isoelástica:

$$\mathrm{U}(c, r) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \beta^{-\gamma} \frac{r^{1-\gamma}}{1-\gamma} \qquad \textbf{[26]}$$

en la que β es un coeficiente de preferencia por el presente y $\gamma > 1$ es una función decreciente de la sustituibilidad entre c y r: Se obtiene la función para $\gamma = 1$, y cuando $\beta = 1$ y γ tiende a infinito [26] se convierte en la función de Léontieff.

A continuación, se supone que la tasa de ahorro de los asalariados σ_a, es la que maximiza la función **[26]**, sujeta a las limitaciones siguientes restricciones:

$$c = w(1-\sigma_a - \hat{\pi}) \qquad \textbf{[27]}$$

$$r = w\left[\sigma_a \rho + \hat{\pi}(1+n)\right] \qquad \textbf{[28]}$$

de lo que resulta:

$$\sigma_a\left[1 + \beta\rho^{(\gamma-1)/\gamma}\right] = 1 - \hat{\pi} - \hat{\pi}(1+n)\beta\rho^{-1/\gamma} \qquad \textbf{[29]}$$

A partir de esta relación, se puede retomar el análisis del caso Pasinnetti y Diamond-Samuelson examinados en el artículo. En el primer caso, se cumplirá siempre que:

$$\rho = \frac{1+n}{\sigma_c} \qquad \textbf{[30]}$$

de donde se deduce directamente que:

$$\sigma_a = \frac{1 - \hat{\pi} - \hat{\pi}\,\beta(1+n)^{(\gamma-1)/\gamma}/\sigma_c^{-1/\gamma}}{1 + \beta\left[(1+n)/\sigma_c\right]^{(\gamma-1)/\gamma}} \qquad \textbf{[31]}$$

que, salvo en el caso límite en que γ tiende a la unidad, sigue siendo una función decreciente de n, como con la función de Léontieff.

En el caso Diamond-Samuelson, tenemos que:

$$\rho = \alpha k^{\alpha-1} = \frac{\alpha(1+n)}{(1-\alpha)\sigma_a} \qquad \textbf{[32]}$$

de donde, sustituyendo en **[29]**, se obtiene:

$$\sigma_a + \sigma_a^{1/\gamma}(1+n)^{(\gamma-1)/\gamma}\left[\beta\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} + \hat{\pi}\,\beta\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-1/\gamma}\right] = 1 - \hat{\pi} \qquad \textbf{[33]}$$

Esta ecuación no tiene una solución analítica sencilla, pero permite comprobar que si $\gamma > 1$, entonces σ_a es siempre una función decreciente de n. Dicho de otro modo, siempre existe el riesgo de acumulación excesiva cuando el valor de n es bajo o negativo, lo que justifica una determinada dosis de reparto en el sistema.

Así las cosas, la definición del sistema de jubilaciones óptimo se convierte en un problema más delicado. Depende, *a priori*, del criterio de utilidad colectiva que se adopte. Ahora bien, la utilidad longitudinal representada por la función **[26]**, aparte de no ser fácil de calcular, no es necesariamente el criterio más pertinente. En particular, si bien puede admitirse que el individuo manifieste una cierta preferencia por el presente al definir su comportamiento al principio de su vida activa, ello no es necesariamente así si la situación se analiza desde fuera, y especialmente si se examina con un criterio de utilidad colectiva transversal, en la que no existe motivo alguno para otorgar menor peso a la utilidad de los jubilados que a la de las personas en actividad.

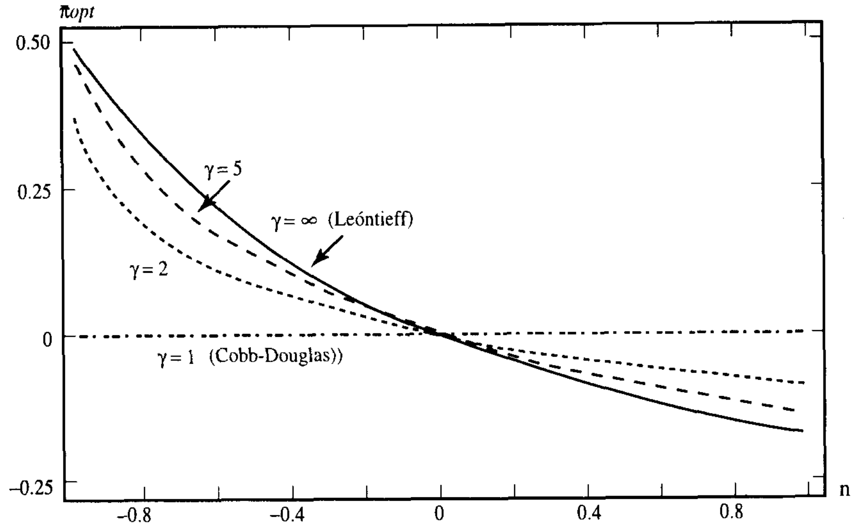
Sin embargo, si nos limitamos a un criterio elemental, como el del nivel de vida medio de las personas activas y los jubilados, veremos que el sistema óptimo es aquel que produce una acumulación que responde a la regla de oro. Cuando $\sigma_c < 1$ implica, como antes, que estamos en el régimen Diamond-Samuelson y que σ_a es igual a $\alpha/(1-\alpha)$ se obtiene, reemplazando en la ecuación **[33]**:

$$\tilde{\pi}_{\text{opt}} = \frac{1}{1 + \beta\,(1+n)^{(\gamma-1)/\gamma}} - \frac{a}{1-\alpha} \qquad \textbf{[34]}$$

Volvemos a encontrar la expresión [25] del texto cuando γ tiende a infinito y $\beta = 1$. En el gráfico A.1 se muestra el perfil de esta tasa óptima en función de n para cuatro valores de γ, siendo $\beta = 1$ y $\alpha = 1/3$ (se representaron las tasas negativas que teóricamente serían óptimas para valores de n elevados). Puede verse que existe continuidad entre los casos Léontieff y Cobb-Douglas, en que la tasa óptima $\tilde{\pi}$ es independiente de n (e igual a cero en este caso en particular). De todos modos, cuando es deseable un cierto grado de reparto, la tasa de impuesto es tanto menor cuanto más importante es la sustituibilidad de la función de preferencias. Sin embargo, cabe subrayar, sobre todo, que las curvas correspondientes a los valores de γ generalmente considerados realistas ($\gamma \simeq 5$) están cualitativamente más cercanos a los del caso Léontieff que a los del caso Cobb-Douglas, lo que justifica *ex post* la elección realizada en el presente texto.

Gráfico 3

GRAVÁMENES ÓPTIMOS DEL SISTEMA DE REPARTO EN FUNCIÓN DE LA TASA DE CRECIMIENTO DEMOGRÁFICO Y DEL VALOR DE γ



ANEXO 2
DEMOSTRACIÓN DE LOS PRINCIPALES RESULTADOS BAJO UNA EVOLUCIÓN DEMOGRÁFICA INESTABLE

1. El caso del reparto puro

El índice del período se denominará t y L_t a la población activa en la fecha t. La población de jubilados en el mismo período será L_{t-1}, sin considerar la mortalidad entre los dos períodos de vida, como se ha hecho en el texto. La tasa de crecimiento de la población activa entre t y $t+1$ será n_t, de modo que:

$$\frac{L_{t+1}}{L_t} = +1 + n_t \qquad [35]$$

Supondremos que n_t fluctúa alrededor de su valor medio n, con una varianza V_n. Además, se supondrá que este valor sigue un proceso no autocorrelacionado y definiremos $\tilde{n}_t = n_t - n$. En términos generales, se designará x al valor medio de una magnitud cualquiera x_t, que corresponderá a su valor de equilibrio en la trayectoria estable asociada a n, por lo menos cuando los valores de V_n sean bajos, y designaremos $\tilde{x}_t$ a la desviación de x_t con respecto a la media.

El primer problema consiste en describir las fluctuaciones del capital por persona activa k_t en respuesta a las fluctuaciones de n_t. Tenemos la ecuación:

$$\frac{k_t = \alpha\sigma_c f(k_{t-1}) L_{t-1}}{L_t} = \frac{\alpha\sigma_c k^{\alpha}_{t-1}}{1 + n_{t-1}} \qquad [36]$$

que es la versión dinámica de la ecuación **[5]**. El valor de equilibrio de k_t es el que se había obtenido de esa ecuación, es decir:

$$k = \frac{\alpha\sigma_c k^{\alpha}}{1 + n} \qquad [37]$$

Dividiendo la primera ecuación por la siguiente, se obtiene:

$$\frac{k_t}{k} = \frac{1 + n}{1 + n_{t-1}} \left[\frac{k_{t-1}}{k}\right]^{\alpha} \qquad [38]$$

Para linealizar esta ecuación consideraremos que, en términos generales, cuando la variación de x_t es pequeña con respecto a x:

$$\log\left[\frac{a + x_t}{a + x}\right] = \log\left[1 + \frac{x_t - x}{a + x}\right] \cong \frac{\tilde{x}_t}{a + x} \qquad [39]$$

Así, la ecuación **[38]** se reduce a:

$$\frac{\tilde{k}_t}{k} = \frac{\alpha \tilde{k}_{t-1}}{k} - \frac{\tilde{n}_{t-1}}{1 + n} \qquad [40]$$

cuya solución es:

$$\tilde{k}_t = -\sum_s \alpha^s \frac{k}{1 + n} \tilde{n}_{t-1-s} \qquad [41]$$

que es negativa en respuesta a una secuencia de $\tilde{n}_t$ positiva, ya que una tasa de crecimiento demográfico más elevada en relación con el nivel medio implica que el capital per cápita es menor que su nivel medio.

De la ecuación **[41]** se deduce que la varianza de k_t es:

$$V_k = \mathrm{Var}(k_t) = \frac{1}{1 - \alpha^2} \frac{k^2}{(1 + n)^2} V_n \qquad [42]$$

y la covarianza para n_{t-1} es:

$$\mathrm{Cov}\,(k_t, n_{t-1}) = -\frac{k}{1 + n} V_n \qquad [43]$$

Ahora bien, si suponemos que el sistema de pensiones reparte en cada período la masa de ingresos salariales, de modo de igualar los niveles de vida de las personas activas y jubiladas, este nivel de vida común es igual a:

$$c_t = (1 - \alpha)\, k_t^{\alpha} \frac{1 + n_{t-1}}{2 + n_{t-1}} \qquad [44]$$

que, expresada en términos de desviaciones con respecto a la media y luego de su linealización, resulta en:

$$\frac{\tilde{c}_t}{c} = \alpha \frac{\tilde{k}_t}{k} + \tilde{n}_{t-1} \left[\frac{1}{1+n} - \frac{1}{2+n}\right] = \alpha \frac{\tilde{k}_t}{k} + \frac{\tilde{n}_{t-1}}{(1+n)(2+n)} \qquad [45]$$

de donde:

$$\frac{V_c}{c^2} = \frac{\mathrm{Var}\,(c_t)}{c^2} \qquad [46]$$

$$= \alpha^2 \frac{V_k}{k^2} + \frac{V_n}{(1+n)^2\,(2+n)^2} + \frac{2a\mathrm{Cov}\,(k_t, n_{t-1})}{k(1+n)(2+n)}$$

$$= \frac{V_n}{(1+n^2)} \left[\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{1}{(2+n^2)} - \frac{2\alpha}{(2+n)} \right]$$

2. Capitalización pura con previsiones miopes

En este caso, si suponemos conocida la masa de capital por persona activa k_t en el instante t tendremos, por un lado, que la rentabilidad de una unidad de ese capital es igual a:

$$f'(k_t) = \alpha k_t^{\alpha} - 1 \qquad [47]$$

de donde se deduce que el nivel de las pensiones, teniendo en cuenta que la totalidad de este ingreso debe destinarse a los jubilados, es:

$$r_t = \alpha k_t^{\alpha-1} \frac{L_t k_t}{L_{t-1}} = \alpha k_t^{\alpha} (1 + n_{t-1}) \qquad [48]$$

y, por otro lado, que el nivel de los salarios será igual a:

$$w_t = (1 - \alpha) k_t^{\alpha} \qquad [49]$$

Entonces, cabe preguntarse cuál será el nivel de ahorro que permitirá establecer la ecuación de evolución del capital. Suponemos que las personas activas en el período t prevén que la rentabilidad del capital será la misma en el período $t+1$ que en el período t. La tasa de ahorro que asegura *ex ante* la igualdad de su jubilación prevista y de su consumo corriente es, por lo tanto, la tasa σ_t tal que:

$$w_t\ (1 - \sigma_t) = w_t \sigma_t \alpha k_t^{\alpha - 1} \qquad [50]$$

de donde:

$$\sigma_t = \frac{1}{1 + \alpha k_t^{\alpha - 1}} \qquad [51]$$

Ahora bien, tenemos que:

$$k_t = w_{t-1} \sigma_{t-1} \frac{L_{t-1}}{L_t} = \frac{w_{t-1} \sigma_{t-1}}{1 + n_{t-1}} \qquad [52]$$

de donde se obtiene una ecuación de recurrencia en relación con k_t reemplazando w_{t-1} por su expresión en función de k_{t-1}:

$$k_t = \frac{1-\alpha}{1 + n_{t-1}} \frac{k_{t-1}^{\alpha}}{1 + \alpha k_{t-1}^{\alpha-1}} \qquad [53]$$

Puede comprobarse que el nivel de equilibrio k dado por esta ecuación es siempre el valor de la ecuación **[23]**, puesto que se trata de la capitalización pura, es decir, cuando $\tilde{\pi} = 0$. Si traemos las magnitudes a sus niveles de equilibrio, ocurre que:

$$\frac{k_t}{k} = \frac{1 + n}{1 + n_{t-1}} \frac{k_{t-1}^{\alpha}}{k^{\alpha}} \frac{1 + \alpha k^{\alpha-1}}{1 + \alpha k_{t-1}^{\alpha-1}} \qquad [54]$$

Ahora bien, el logaritmo del último término de este producto se linealiza en:

$$\log \left[\frac{1 + \alpha k^{\alpha - 1}}{1 + \alpha k_{t-1}^{\alpha-1}} \right] = (1 - \alpha) \frac{\alpha k^{\alpha-1} \tilde{k}_{t-1}}{1 + \alpha k^{\alpha - 1}} \qquad [55]$$

que, considerando la expresión de k, se reduce a $\alpha(1+n)\, \tilde{k}_{t-1}/k$. En resumen, tenemos la ecuación de recurrencia lineal en k_t:

$$\frac{\tilde{k}_t}{k} = \alpha\,(2+n)\;\frac{\tilde{k}_{t-1}}{k} - \frac{\tilde{n}_{t-1}}{1+n} \qquad [56]$$

de donde se obtiene:

$$\frac{V_k}{k^2} = \frac{1}{1-\alpha^2\,(2+n)^2}\;\frac{V_n}{(1+n)^2} \qquad [57]$$

y:

$$\mathrm{Cov}(k_t, n_{t-1}) = -\frac{kV_n}{1+n} \qquad [58]$$

Esta vez, las varianzas de las jubilaciones y del consumo de los activos deben deducirse por separado, ya que al no verificarse en general las previsiones sobre las primeras, no puede asegurarse la igualdad de las dos varianzas. Por tratarse de jubilaciones, al linealizar la ecuación **[48]** tenemos:

$$\frac{\tilde{r}_t}{r} = \frac{\alpha\,\tilde{k}_t}{k} + \frac{\tilde{n}_t - 1}{1+n} \qquad [59]$$

y, en consecuencia:

$$\frac{V_r}{r^2} = \frac{\alpha^2 V_k}{k^2} + \frac{V_n}{(1+n)^2} + \frac{2\alpha \mathrm{Cov}\,(k_t, n_t - 1)}{k(1+n)} \qquad [60]$$

$$= \frac{V_n}{(1+n)^2}\left[\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2(2+n)^2} + 1 - 2\alpha\right]$$

Tratándose del consumo de los activos, tenemos que:

$$c_t = w_t \sigma_t \alpha k_t^{\alpha-1} = (1-\alpha)\,\alpha\,\frac{k_t^{2\alpha\ 1}}{1+\alpha k_t^{\alpha-1}} \qquad [61]$$

de donde, si dividimos por el nivel de equilibrio c, se obtiene:

$$\frac{\tilde{c}_t}{c} = \left[\frac{\tilde{k}_t}{k}\right]^{2\alpha-1} \frac{1+\alpha k^{\alpha-1}}{1+\alpha\,\tilde{k}_t^{\alpha-1}} \qquad [62]$$

La linealización es similar a la efectuada para la ecuación de k_t, obteniéndose:

$$\frac{\tilde{c}_t}{c} = (3\alpha + n\alpha - 1)\frac{\tilde{k}_t}{k} \qquad [63]$$

de donde:

$$\frac{V_c}{c^2} = \frac{V_n}{(1+n)^2} \; \frac{(3\alpha + n\alpha - 1)^2}{1 - \alpha^2 (2+n)^2} \qquad [64]$$

3. Capitalización pura con previsiones perfectas

En este último caso, para un valor dado de k_t, las expresiones del nivel de las jubilaciones y del nivel de los salarios siguen siendo las dadas en el caso precedente por las ecuaciones **[48]** y **[49]**. La diferencia radica en el comportamiento de ahorro de los activos. En este caso, el valor de σ_t tendrá en cuenta la rentabilidad efectiva del capital para t+1. En consecuencia, tendremos:

$$w_t(1 - \sigma_t) = w_t\sigma_t\alpha k_{t+1}^{\alpha} \qquad [65]$$

y, por lo tanto, se tendrá:

$$k_{t+1} = \frac{\omega_t\sigma_t}{(1+n_t)} \qquad [66]$$

A nivel del individuo o del fondo de pensiones que elaboran un plan de jubilación, el problema es, entonces, resolver la ecuación en σ_t obtenida combinando esas dos ecuaciones. Si se desea más bien determinar directamente la evolución de k_t, que es lo que ahora nos ocupa, es mejor eliminar σ_t, lo que da:

$$k_t + 1 = \frac{w_t}{1+n_t} \; \frac{1}{1 + \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}} \qquad [67]$$

de donde se obtiene la ecuación de recurrencia a k_t reemplazando $w_t$por su expresión en función de k_t:

$$k_{t+1}(1 + \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}) = \frac{(1-\alpha)\alpha k_t^{\alpha}}{1+n_t} \qquad [68]$$

que, reformulada en k_t y k_{t-1} y reducida a su valor de equilibrio a largo plazo, k:

$$\frac{k_t}{k}\frac{1+\alpha k^{\alpha-1}}{1+\alpha k^{\alpha-1}} = \frac{1+n}{1+n_{t-1}} \frac{k^{\alpha}_{t-1}}{k^{\alpha}} \quad [69]$$

Cabe destacar la analogía entre esta ecuación y la de recurrencia **[54]** correspondiente a las previsiones miopes. La única diferencia radica en el hecho de que uno de los términos expresados en t- 1 se transforma en un término expresado en t. Esta analogía permite retomar directamente la linealización efectuada para la ecuación **[54]**, lo que da:

$$(1-\alpha(1+n)) \frac{\tilde{k}_t}{k} = \frac{\alpha \tilde{k}_{t-1}}{k} \frac{\tilde{n}_{t-1}}{1+n} \quad [70]$$

de donde se deduce que:

$$\frac{V_k}{k^2} = \frac{V_n}{(1+n)^2} \frac{1}{(1-\alpha(1+n))^2-\alpha^2} \quad [71]$$

y que:

$$\mathrm{Cov}(k_t, n_{t-1}) = -\frac{kV_n}{(1-n)(1-\alpha(1+n))} \cdot \quad [72]$$

Teniendo en cuenta que la relación entre las jubilaciones y la masa de capital es la misma que antes, tendremos finalmente que:

$$\frac{V_r}{r^2} = \frac{V_n}{(1+n)^2}\left[\frac{\alpha^2}{(1-\alpha(2+n))(1-\alpha n)} + 1 - \frac{2\alpha}{(1-\alpha(1+n))}\right] \quad [73]$$

que, por construcción, será idéntica al cuadrado del coeficiente de variación del consumo de las personas en actividad.

Bibliografía

Barro, R. J. (1974), "Are government bonds net wealth?", *Journal of Political Economy*, vol. 82, N° 6, Chicago, University of Chicago Press.

Blanchet, D. (1988a), "Un système de retraite mixte par répartition et par capitalisation peut il corriger les effets du vieillissement?", *Population*, N°1.

______ (1988b), "Population growth and capital dilution effects in neo-classical growth models", *Journal of Population Economics*, N°1.

Bourgeois-Pichat, J. (1978), "Le financement des retraites par capitalisation", *Population*, N°6.

Deardoff, A. V. (1976), "The growth rate for population: comment", *International Economic Review*, vol. 17, N°2, Philadelphia, University of Pennsylvania.

Diamond, P. A. (1965), "National debt in a neo-classical growth model", *American Economic Review*, vol. 55, N°2.

Dolde, W. J. y J. Tobin (1983), "Mandatory retirement saving and capital formation", The Determinants of National Saving and Wealth, F. Modigliani y R. Hemming (comp.), McMillan.

Masson, A. (1988), "Permanent income, age and the distribution of wealth", *Annales d'Economie et de Statistique*, N°9.

Pasinetti, L. L. (1962), "Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth", *Review of Economic Studies*, vol. 29, N°81.

Samuelson, P. A. (1976), "The optimum growth rate for population: agreement and evaluations", *International Economic Review*, vol. 17, N°2, Philadelphia, University of Pennsylvania.

(1975a), "The optimum growth rate for population", *International Economic Review*, vol. 16, N°3, Philadelphia, University of Pennsylvania.

______ (1975b), "Optimum social security in a life-cycle growth model", *International Economic Review*, vol. 16, N°3, Philadelphia, University of Pennsylvania.

Samuelson, P. A. y Modigliani, F. (1966), "The Pasinetti paradox in neo-classical and more general models", *Review of Economic Studies*, vol. 33, N°96.

Van Praag, B. y Poeth, G. (1975), "The introduction of an old-age pension in a growing economy: a first approach", *Journal of Public Economics*, vol. 4, N°1.

Wolff, E. N. (1988a), "Life-cycle savings and the individual distribution of wealth by class", *Modeling the Accumulation and Distribution of Wealth*, D. Kessler y A. Masson (comp.), Oxford, Clarendon Press.

________(1988b), "Social security, pensions and the life accumulation of wealth: some empirical tests", *Annales d'Economie et de Statistique*, N°9.